Nierówności różniczkowe w badaniu równań cząstkowych; pamięci Profesora Jacka Szarskiego

Tomasz Dłotko
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Fragmenty monografii *Critical Parabolic-Type Problems*
Tomasz W. Dłotko, Yejuan Wang
de Gruyter 2020 (ze zmianami 2021)

PTM Kraków, 3 grudnia 2021

ProfesorJacek Szarski

(ur. 6 lutego 1921 w Krakowie, zm. 21 lutego 1980 w Zakopanem). Pochodził ze znanej krakowskiej rodziny kupieckiej. Jacek Szarski pracował w Uniwersytecie Jagiellońskim od ukończenia studiów w marcu 1945 roku, w tym jako profesor nadzwyczajny (1954) i zwyczajny (1962). Równocześnie (1949 - 1968) pracował w Instytucie Matematyki PAN. Po utworzeniu na Uniwersytecie Jagiellońskim Instytutu Matematyki został jego dyrektorem (1955) i kierownikiem Zakładu Równań Różniczkowych. Pełnił liczne funkcje we władzach UJ: prorektora (1964 - 66), dziekana Wydziału Matematyczno - Fizyczno - Chemicznego (1956 - 58), prodziekana (1954 - 56).
Od 1969 prof. J. Szarski był członkiem korespondentem PAN a od 1979 prezesem Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Jako profesor wizytujący odwiedził uniwersytet stanu Kansas w Lawrence 1958/59 oraz uniwersytet w Karlsruhe 1963.
Przedmiotem badań Jacka Szarskiego były równania i nierówności różniczkowe. Opublikował monografię *Differential Inequalities*, PWN, 1967 [Sz].

Profesor Bolesław Szafirski

(ur. 26 czerwca 1935 w Ilkowicach, zm. 6 listopada 2016 w Krakowie). Profesor zwyczajny Uniwersytetu Jagiellońskiego, członek korespondent Polskiej Akademii Umiejętności, prezes Polskiego Towarzystwa Matematycznego w latach 1999-2001 i 2001-2003.
Kierownik Zakładu (później Katedry) Matematycznych Problemów Fizyki i Techniki w Instytucie Matematyki UJ, gdzie pełnił też funkcję zastępcy dyrektora (1981-1984) i dyrektora (1984-1987). W latach 1987-1993 dziekan Wydziału Matematyki i Fizyki UJ. Przez ponad 20 lat redaktor naczelny czasopisma *Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica*. Był promotorem 13 doktoratów. Jednym z jego zainteresowań była teoria równania Naviera-Stokesa.

Dnia 24 maja 2000 roku Instytut Claya ogłosił listę siedmiu najważniejszych, nierozwiązanych problemów matematycznych XX wieku; tzw. Problemów Milenijnych. Jeden z nich jest związany z *równaniem Naviera-Stokesa w wymiarze 3*; równanie opisuje zmianę w czasie wektora prędkości cieczy $u(t,x) = (u_1(t,x), ..., u_3(t,x))$ oraz ciśnienia $p(t,x) \in \mathbb{R}$. Rozpaczmy problem Cauchy'ego:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x), \;\; i = 1, ..., 3, \\
&div u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3, \\
&u(0,x) = u_0(x).
\end{aligned} \tag{1}$$

Wartość początkowa $u_0(x)$ jest zadana, C^∞ bezdywergencyjne pole wektorowe na R^N o składowych $f_i(x), i = 1, ..., 3$ opisuje siły zewnętrzne, zaś ν jest dodatnim 'współczynnikiem lepkości'. Pytanie brzmi: *Czy dla C^∞ regularnych danych istnieje globalne w czasie gładkie rozwiązanie powyższego układu?*

Podejście półgrupowe.

Poszukujemy rozwiązań autonomicznych równań różniczkowych w ramach *teorii półgrup*. Dynamika generowana przez takie równanie, gdy dane początkowe należą do przestrzeni metrycznej E, może być opisana przez *rozwiązanie półgrupowe*

$$T(t) : u(0) \to u(t),$$

działające na przestrzeni E (patrz również [Sz, str. 229]).

Definition

Jednoparametrową rodzinę $\{T(t)\}$ odwzorowań $T(t) : E \to E$, $t \geq 0$, nazywamy C^0-półgrupą, jeżeli

- T(0) jest odwzorowaniem identycznościowym na E;
- $T(t+s) = T(t)T(s)$ dla wszystkich $t, s \geq 0$;
- funkcja
$$[0, \infty) \times E \ni (t, x) \to T(t)x \in E$$
jest ciągła w każdym punkcie $(t, x) \in [0, \infty) \times E$.

Pochodne ułamkowe.

Tzw. 'całki ułamkowe' były wprowadzone przez N.H. Abela w roku 1823 w celu rozwiązania, sformułowany przez niego, *problemu tautochrony*. Abel badał równanie całkowe

$$\int_a^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{\mu}} dt = f(x), \quad x > a, \; 0 < \mu < 1. \tag{2}$$

Później, w latach 1832-1837, J. Liouville uogólnił rozważania Abela wprowadzając 'pochodną ułamkową':

$$D^{-\rho} f(x) = (-1)^{-\rho} \Gamma(\rho) \int_0^{\infty} f(x+t) t^{\rho-1} dt, \; -\infty < x < \infty, \; Re\rho > 0.$$

Pojęcie to było również badane przez B. Riemanna (1847), J. Hadamarda (1892), G.H. Hardy'ego and M. Riesza (1915) i wielu innych. Nowoczesna definicja pochodnych ułamkowych należy do B.V. Balakrishnana (1960) i była badana przez H. Komatsu wkrótce po jej wprowadzeniu. Przypomnimy tę definicję dalej.

References 1.

- A. V. Balakrishnan, *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them*, Pac. J. Math. **10** (1960), 419-437.
- K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- H. Amann, *Linear and Quasilinear Parabolic Problems, Vol. I*, Birkhauser, Basel, 1995.
- A. Yagi, *Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2010.

Semiliniowe równanie z dodatnim operatorem sektorialnym.

Zajmujemy się abstrakcyjnym semiliniowym zadaniem Cauchy'ego zawierającym dodatni operator sektorialny A:

$$\begin{aligned} &u_t + Au = F(u), \quad t > 0, \\ &u(0) = u_0. \end{aligned} \tag{3}$$

([HE]). Klasa ta obejmuje wiele istotnych równań fizyki matematycznej, w tym; semiliniowe równanie ciepła i układy takich równań, równanie Naviera-Stokesa, podkrytyczne równanie Quasi-geostrophic. Naszym celem jest również badanie granic tego typu równań z parameterm; szczególnych *równań quasiliniowych*.

Niech $S_{a,\phi}$, $a \in R$, $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, będzie *sektorem* na płaszczyźnie $\mathbb{C}$:

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in C : \phi \leq |arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}. \tag{4}$$

Liniowy, domknięty i gęsto określony operator $A : X \supset D(A) \to X$ w przestrzeni Banacha X nazywamy *operatorem sektorialnym* jeśli istnieją a, ϕ oraz $M > 0$ takie, że:

- zbiór rezolwenty $\rho(A)$ of A zawiera sektor $S_{a,\phi}$,
- $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$, dla każdego $\lambda \in S_{a,\phi}$.

Szczególne operatory sektorialne.

Każdy ograniczony operator liniowy na przestrzeni Banacha X jest sektorialny. Podana wyżej definicja jest nieco złożona. ale istnieje wiele przykładów operatorów sektorialnych. Gdy H jest przestrzenią Hilberta a $A : H \supset D(A) \to H$ liniowym, gęsto określonym i samosprzężonym operatorem w H, który jest ograniczony z dołu;

$$\exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{x \in D(A)} < Ax, x >_H \geq m \|x\|_H^2; \tag{5}$$

to taki operator będzie sektorialny w H w myśl poprzedniej definicji.
W szczególności operator $-\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ $(\partial\Omega \in C^2)$, jest sektorialny i dodatnio określony. Również operator $\Delta^2 : H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ $(\partial\Omega \in C^4)$, jest sektorialny i dodatnio określony.
Operatory sektorialne są istotne, bowiem gdy A jest sektorialny to operator $-A$ jest *generatorem półgrupy analitycznej* (patrz [HE, C-D]). Więcej informacji dotyczących operatorów sektorialnych można znaleźć w [HE, C-D, Ya].

Dla samosprzężonych operatorów nieujemnych ($m = 0$ w (5)) na przestrzeni Hilberta H, można zdefiniować ich *pierwiastek kwadratowy*. Własność ta przenosi się na dowolny *dodatni* (a nawet *nieujemny*; [M-S]) operator sektorialny w przestrzeni Banacha. Definicja była podana przez A.V. Balakrishnana w 1959/60 i wkrótce po tym przebadana przez Hikosaburo Komatsu w sześciu pracach z lat 1966-1970 (np. [KO]).

Przypomnijmy definicję potęgi ułamkowej operatora nieujemnego (np. [KO], p. 299); Niech A będzie liniowym domkniętym i gęsto określonym operatorem w przestrzeni Banacha X takim, że zbiór jego rezolwenty zawiera półprostą $(-\infty, 0)$, a rezolwenta spełnia:

$$\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| \leq M, \ \ \lambda > 0. \tag{6}$$

Wówczas, dla $\eta \in (0, 1), \phi \in D(A)$,

$$A^\eta \phi = \frac{\sin(\pi\eta)}{\pi} \int_0^\infty s^{\eta-1} A(s + A)^{-1} \phi ds. \tag{7}$$

Można poszerzyć tę definicję na potęgi $\eta \geq 1$ (e.g. [M-S]), oraz na potęgi ujemne (np. [HE]). Dla operatora $(-\Delta)$ na $\mathbb{R}^N$ używa się wielu (równoważnych) definicji; porównaj niedawną pracę [Kw].

Formuła całkowa Cauchy-Duhamela.

Abstrakcyjny problem Cauchy'ego z operatorem sektorialnym dodatnim posiada rozwiązanie (zwane 'mild solution') dane przez *formułę Cauchy'ego* (patrz również [Sz, §74]):

$$u(t, u_0) = e^{-At} u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} F(u(s, u_0)) ds, \quad t \in [0, \tau_{u_0}), \tag{8}$$

τ_{u_0} jest *czasem życia* lokalnego rozwiązania odpowiadającego warunkowi początkowemu u_0. Tutaj e^{-At} oznacza półgrupę zadaną poprzez równanie liniowe:

$$\begin{aligned} &u_t + Au = 0, \quad t > 0, \\ &u(0) = u_0. \end{aligned} \tag{9}$$

Całka jest tu rozumiana jako *całka Bochnera* o wartościach w przestrzeni Banacha. Dwa oszacowania zachodzące dla operatorów sektorialnych mają decydujące znaczenie dla możliwości zastosowania twierdzenia Banacha do tego równania całkowego; dla pewnych stałych dodatnich c_0, c_1 oraz a jak w (5)

$$\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq c_0 e^{-at}, t \geq 0; \quad \|Ae^{-At}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{c_1}{t} e^{-at}, t > 0.$$

Lokalne w czasie X^α rozwiązania.

Aby uzyskać lokalne w czasie rozwiązania abstrakcyjnego zadania:

$$\begin{aligned} &u_t + Au = F(u), \quad t > 0, \\ &u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{11}$$

poszukujemy rozwiązania powiązanego z (11) równania całkowego (8) (tzw. *mild solution*). Używamy tw. Banacha o punkcie stałym a poniższe twierdzenie uogólnia klasyczne tw. Picarda.

Theorem

(Dan Henry) Niech X będzie przestrzenią Banacha, $A : D(A) \to X$ operatorem sektorialnym dodatnim w X a $F : X^\alpha := D(A^\alpha) \to X$ będzie Lipschitzowska na ograniczonych podzbiorach X^α przy pewnym $\alpha \in [0, 1)$. Wówczas, dla dowolnego $u_0 \in X^\alpha$, istnieje jedyne mild solution problemu (11) *zadane na maksymalnym* przedziale istnienia $[0, \tau_{u_0})$, *posiadające następujące własności:*

$$u \in C^0([0, \tau_{u_0}), X^\alpha) \cap C^1((0, \tau_{u_0}), X), u(t) \in D(A) \ t \in (0, \tau_{u_0}),$$

$$u_t \in C^0((0, \tau_{u_0}), X^\gamma), \gamma < \alpha.$$

References 2.

- J. Szarski, *Differential Inequalities*, PWN, Warszawa, 1967.
- P. E. Sobolevskii, *On non-stationary equations of hydrodynamics for viscous fluid*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **128**, 45-48 (1959), (in Russian).
- H. Komatsu, *Fractional powers of operators*, Pacific J. Math. **19** (1966), 285-346.
- W. von Wahl, *Global solutions to evolution equations of parabolic type*, in: "Differential Equations in Banach Spaces", Springer-Verlag, Berlin, 1986, 254-266.
- J.W. Cholewa, T. Dlotko, *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*, Cambridge University Press, 2000.
- C. Martínez Carracedo, M. Sanz Alix, The Theory of Fractional Powers of Operators, Elsevier, Amsterdam, 2001.

Globalna w czasie przedłużalność rozwiązań lokalnych.

Analogicznie jak w przypadku równań różniczkowych zwyczajnych: Lokalne rozwiązanie otrzymane w twierdzeniu powyżej może być przedłużone globalnie w czasie jeśli istnieje oszacowanie a priori nie pozwalające wybuchnąć jego normie $\|u(t, u_0)\|_{X^\alpha}$. Problemy o fizycznym rodowodzie posiadają zazwyczaj naturalne oszacowania rozwiązań wynikające np. z rozpraszania energii, zachowywania masy czy izolowania układu od otoczenia. Matematycznie te oszacowania/ograniczenia można ująć jako:

$$\|u(t, u_0)\|_Y \leq const(\|u_0\|_{X^\alpha}), \tag{12}$$

gdzie Y jest pewną przestrzenią Banacha, spełniającą warunek $D(A) \subset Y$. Takie oszacowanie pozwalają nam przedłużyć lokalne rozwiązanie o ile zachodzi następujący *warunek podporządkowania*:

$$\|F(u(t, u_0))\|_X \leq g(\|u(t, u_0)\|_Y)(1 + \|u(t, u_0)\|^{\theta}_{X^\alpha}), \tag{13}$$

gdzie $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ jest funkcją rosnącą , oraz wykładnik $\theta \in [0, 1)$. Warunek (13) oznacza, że *nieliniowość F (brana na rozwiązaniu) jest kontrolowana przez $D(A^\alpha)$ normę rozwiązania w potędze $\theta < 1$ oraz normę rozwiązania w Y.*

Równanie Naviera-Stokesa.

Przypomnimy klasyczne równanie N-S zapisane tutaj w równoważnej postaci, wykorzystującej własność bezdywergencyjności. Mamy:

$$
\begin{aligned}
&u_{jt} = \nu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i} + f_j, \quad div u = 0, \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\
&u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\
&u(0, x) = u_0(x),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

gdzie $u = (u_1, u_2, u_3)$. Definiujemy również *operator Stokesa*

$$
A = A_r = -\nu P_r \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix},
$$

gdzie P_r oznacza *operator rzutowania* z $\mathcal{L}^r(\Omega)$ na X_r zadany przez *rozkład Helmholtza* elementów przestrzeni $\mathcal{L}^r(\Omega)$ na część bezdywergencyjną i gradient funkcji skalarnej.

Precyzyjniej:

$$X_r = cl_{[L^r(\Omega)]^N}\{\phi \in [C_0^\infty(\Omega)]^N : div\,\phi = 0\},\ 1 < r < \infty.$$

Kładąc

$$A_r u = -\nu P_r \Delta u \quad \text{and} \quad F_r(u) = -P_r(u \cdot \nabla u),$$

równanie N-S przepisze się jako abstrakcyjny problem Cauchy'ego w X_r,

$$\begin{aligned} &u_t + A_r u = F_r(u) + P_r f,\ t > 0,\\ &u(0) = u_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Operator Stokesa A_r jest sektorialny w przestrzeni Banacha X_r [G-M]. Będziemy dalej opuszczać w oznaczeniach zależność od r. Przypomnijmy też, że używamy oznaczenia $X^\alpha = D(A^\alpha)$ na dziedzinę operatora A^α.

Lokalna rozwiązalność $N = 3$.

Głównym narzędziem w oszacowaniach jest wniosek z Lemma 2.2 [G-M] (z parametrami $\delta = \frac{1}{8}, \theta = \rho = \frac{3}{4}^{+}$; here $\frac{3}{4}^{+} > \frac{3}{4}$):

$$\|A^{-\frac{1}{8}}P(u \cdot \nabla)v\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq M\|A^{\frac{3}{4}^{+}}u\|_{[L^2(\Omega)]^3}\|A^{\frac{3}{4}^{+}}v\|_{[L^2(\Omega)]^3}. \quad (16)$$

Ponieważ wyrażenie $P(u \cdot \nabla)v$ jest dwuliniowe, nieliniowość $F(u) = -P(u \cdot \nabla)u + Pf$ działa z $D(A^{\frac{3}{4}^{+}}) \subset [H^{\frac{3}{2}^{+}}(\Omega)]^3$ w $D(A^{-\frac{1}{8}})$ jak odwzorowanie Lipschitzowskie na ograniczonych podzbiorach $D(A^{\frac{3}{4}^{+}})$. Własność ta wystarcza dla uzyskania *lokalnego w czasie* rozwiązania (15):

Theorem

Gdy $Pf \in D(A^{-\frac{1}{8}})$, $u_0 \in D(A^{\frac{3}{4}^{+}})$, wówczas istnieje jedyne lokalne w czasie mild solution $u(t)$ *problemu* (15) *w przestrzeni fazowej* $D(A^{\frac{3}{4}^{+}}) \subset [H^{\frac{3}{2}^{+}}(\Omega)]^3$. *Co więcej,*

$$u \in C([0,\tau); D(A^{\frac{3}{4}^{+}})) \cap C((0,\tau); D(A^{\frac{7}{8}})), \; u_t \in C((0,\tau); D(A^{\frac{7}{8}^{-}})),$$

$\tau > 0$ *oznacza 'czas życia' lokalnego rozwiązania (zależny od u_0).*

Specyficzne oszacowanie a priori.

Przypomnijmy, że w przypadku równania N-S specyficzne *oszacowanie a priori* otrzymujemy mnożąc (skalarnie) (15) przez u:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = -\nu\|\nabla u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} - \int_\Omega \nabla p \cdot u dx + \int_\Omega f \cdot u dx. \quad (17)$$

Składnik nieliniowy składnik znika w powyższym oszacowaniu ponieważ $divu = 0$ (podobnie składnik zawierający ciśnienie);

$$\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} u_j dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3} u_j^2 dx = 0. \quad (18)$$

Używając *nierówności Poincaré* i teorii nierówności różniczkowych dostajemy globalne w czasie oszacowanie:

$$\|u(t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \max\{\|u_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}; \frac{2c_\nu c_P\|f\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}}{\nu}\}, \quad (19)$$

gdzie c_P jest stałą z nierówności Poincaré. Mając już pokazaną powyższą nierównośc można wrócić do (17) i uzyskać oszacowanie

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;[H^1_0(\Omega)]^3)} \leq \frac{1}{2\nu}(c_\nu T\|f\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}), \quad (20)$$

Krytyczny wykładnik $N = 3$.

Używając oszacowania (16) wyznaczymy obecnie wartość wykładnika dla trójwymiarowego równania N-S. Mamy,

$$\|P(u\cdot\nabla)u\|_{X^{-\frac{1}{2}}} = \|A^{-\frac{1}{2}}P(u\cdot\nabla)u\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq M\|u^2\|_{[L^2(\Omega)]^3}$$
$$\leq c\|u\|^2_{[L^4(\Omega)]^3} \leq c\|u\|^{\frac{3}{2}}_{[H^1(\Omega)]^3}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{[L^2(\Omega)]^3} = c\|u\|^{\frac{3}{2}}_{X^{\frac{1}{2}}}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{[L^2(\Omega)]^3}. \tag{21}$$

Z kolei sprawdzimy jak duży powinien być wykładnik $s > 1$ aby wzmocniona dyfuzja o postaci $(-\Delta)^s$ zastępująca operator $(-\Delta)$ w (15) wraz ze standardowym oszacowaniem a priori w $L^2(\Omega)$ pozwalały kontrolować nieliniowość w równaniu N-S. Używając kolejny razoszacowań Y. Gigi, dostaniemy:

$$\|A^{-\frac{1}{2}}P(u\cdot\nabla)u\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq c\|u\|^2_{[L^4(\Omega)]^3} \leq c\|u\|^{\frac{8s-7}{4s-2}}_{[L^2(\Omega)]^3}\|u\|^{\frac{3}{2(2s-1)}}_{[H^{2s-1}(\Omega)]^3}.$$

Krytyczną wartość wykładnika s wyznaczamy z warunku; $\frac{3}{2(2s-1)} = 1$. Stąd, $s = \frac{5}{4}$ dla równania N-S w wymiarze 3.

Rozpatrzmy *aproksymację* oryginalnego równania N-S (15) posiadającą globalne w czasie, regularne i jednoznaczne rozwiązania:

$$\begin{aligned} &u_t = -(A + \epsilon A^s)u - P(u \cdot \nabla)u + Pf, \quad t > 0, \\ &u(0, x) = u_0(x), \end{aligned} \tag{22}$$

z parametrami $s > \frac{5}{4}$ oraz $\epsilon > 0$. Dla ustalonego (chwilowo) parametru ϵ, oznaczmy przez u^ϵ rozwiązanie ostatniego problemu. Chodzi nam konkretnie o rozwiązanie w przestrzeni bazowej $D(A^{-\frac{1}{4}})$, otrzymane analogicznie jak rozwiązanie oryginalnego równania N-S. Licząc jak w przypadku oryginalnego równania N-S, dostaniemy standardowe oszacowanie a priori dla rozwiązań (22)

$$\sqrt{\epsilon}\|A^{\frac{s}{2}} u^\epsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} \leq const, \tag{23}$$

ze stałą const niezależną od $\epsilon > 0$. Użyjemy tego oszacowania przechodząc z ϵ do zera aby pozbyć się składnika z wyższą gładkością w granicy.
Taka aproksymacja, choć jedynie dla $s \in \mathbb{N}$, była po raz pierwszy zaproponowana przez J.-L. Lions [Li] w 1969 roku.

Przypomnijmy z kolei definicję *słabego rozwiązania* przybliżającego problemu (22):

$$< u_t^\epsilon, v >_{[L^2(\Omega)]^3} = - < A^{\frac{1}{2}} u^\epsilon, A^{\frac{1}{2}} v >_{[L^2(\Omega)]^3}$$
$$- \epsilon < A^{\frac{s}{2}} u^\epsilon, A^{\frac{s}{2}} v >_{[L^2(\Omega)]^3} + < F(u^\epsilon), v >_{[L^2(\Omega)]^3} + < Pf, v >_{[L^2(\Omega)]^3},$$

gdzie $v \in D(A^{\frac{s}{2}})$ jest 'dowolną funkcją próbną'.
Używając jednostajnego względem $\epsilon > 0$ standardowego oszacowania a priori w $[L^2(\Omega)]^3$ oraz (23), możemy przejść z $\epsilon \to 0$ (lub $u^\epsilon \to U$) w słabym sformułowaniu (22) i otrzymać równość

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} < U, v >_{[L^2(\Omega)]^3} &= - < A^{\frac{1}{2}} U, A^{\frac{1}{2}} v >_{[L^2(\Omega)]^3} \\ &+ < A^{-\frac{1}{2}} F(U), A^{\frac{1}{2}} v >_{[L^2(\Omega)]^3} + < Pf, v >_{[L^2(\Omega)]^3}, \end{aligned} \tag{24}$$

gdzie $v \in D(A^{\frac{1}{2}})$ była dowolna, zaś zbieżność pierwszego składnika po prawej stronie wynika ze zbieżności słabej u^ϵ do U. W granicy otrzymaliśmy *słabe rozwiązanie* U trójwymiarowego równania N-S, jak w oryginalnej definicji J. Leray (e.g. [WA, p.139]). Rozwiązanie to jest globalne w czasie, nie musi być jednak jednoznaczne.

Globalne regularne rozwiązania w 3D. Małe dane.

Lokalne rozwiązania można przedłużyć globalnie o ile dysponujemy dobrymi oszacowaniami a priori, zapobiegającymi wybuchowi $D(A_2^{\frac{3}{4}+})$ normy rozwiązania (używamy do tego teorii nierówności różniczkowych). Mnożymy układ N-S skalarnie przez Au:

$$< u_t, Au >_{[L^2(\Omega)]^3} = - < Au, Au >_{[L^2(\Omega)]^3}$$
$$- < P(u \cdot \nabla)u, Au >_{[L^2(\Omega)]^3} + < Pf, Au >_{[L^2(\Omega)]^3} .$$

Theorem

Gdy $u_0 \in D(A) \subset [H^2(\Omega)]^3$ oraz $f \in [L^2(\Omega)]^3$ spełniają 'warunek małości' (25), wówczas $[H^1(\Omega)]^3$ norma rozwiązania u będzie ograniczona dla $t \geq 0$.

Ważną rolę gra tutaj lokalne minimum funkcji rzeczywistej $g(z) = -\frac{c'\nu}{2} z + C_\nu z^5 + C_\nu \|Pf\|^2_{[L^2(\Omega)]^3}$, przyjęte w $z_{min} = \left(\frac{c'\nu}{10 C_\nu}\right)^{\frac{1}{4}}$;

$$g(z_{min}) < 0, \text{ równoważnie } \|Pf\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} < 4 z^5_{min}, \text{ oraz}$$

$$\|u_0\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} \leq z_{min} = \left(\frac{c'\nu}{10 C_\nu}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ (gdzie } z(t) \sim \|u(t)\|^2_{[H^1_0(\Omega)]^3}).$$

Układ Burgersa.

Przedyskutujemy na koniec krótko przykład *układu typu Burgersa w 3D*, otrzymany przez usunięcie ciśnienia w jednorodnym ($f=0$) trójwymiarowym równaniu N-S (o nieliniowości $\sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}(U_i U_j)$):

$$
\begin{aligned}
&U_t = \nu \Delta U - (U\cdot\nabla)U, \quad x\in\Omega,\ t>0;\\
&U = 0, \quad t>0, \quad x\in\partial\Omega,\\
&U(0,x) = U_0(x).
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Zauważamy, że każda składowa dostarecznie regularnego rozwiązania (26) spełnia Zasadę Maksimum:

$$
\|U_i(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|U_{0i}\|_{L^\infty(\Omega)},\ i=1,2,3. \tag{27}
$$

Mamy więc naturalne oszacowanie a priori w $Y=[L^\infty(\Omega)]^3$ dla rozwiązań takiego układu. Zachodzi także oszacowanie:

$$
\|(U\cdot\nabla)U\|_{[L^2(\Omega)]^3} \le \|U\|_{[L^\infty(\Omega)]^3}\|U\|_{[H^1_0(\Omega)]^3} \le \|U_0\|_{[L^\infty(\Omega)]^3}\|U\|_{[H^1_0(\Omega)]^3},
$$

$$
\|(U\cdot\nabla)U\|_{[H^{-1}(\Omega)]^3} \le c\|U\|^2_{[L^\infty(\Omega)]^3},
$$

dla lokalnych rozwiązań w p. fazowej $[H^{\frac{3}{2}^+}(\Omega)]^3 \cap [H^1_0(\Omega)]^3$.

Ponieważ $H^{\frac{3}{2}^+}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, Zasada Maksimum działa dla takich rozwiązań. Używając nierówności interpolacyjnej, otrzymujemy oszacowanie:

$$\|(U \cdot \nabla)U\|_{X^{-\frac{1}{8}}} = \|(U \cdot \nabla)U\|_{[H^{-\frac{1}{4}}(\Omega)]^3} \leq c\|U\|^{\frac{5}{4}}_{[L^\infty(\Omega)]^3}\|U\|^{\frac{3}{4}}_{[H^1_0(\Omega)]^3}$$
$$\leq c\|U_0\|^{\frac{5}{4}}_{[L^\infty(\Omega)]^3}\|U\|^{\frac{3}{4}}_{[H^1_0(\Omega)]^3} = c\|U_0\|^{\frac{5}{4}}_{[L^\infty(\Omega)]^3}\|U\|^{\frac{3}{4}}_{X^{\frac{1}{2}}}, \tag{28}$$

co pokazuje, że nieliniowość jest *podkrytyczna* w tym przypadku. W rezultacie lokalne rozwiązania mogą być przedłużone globalnie w czasie.

Obserwacja. Widzimy, że problem (26) (podobny do trójwymiarowego równania Naviera-Stokesa, ale bez ciśnienia), podlega oszacowaniu a priori rozwiązań w L^∞ (podczas gdy 3-D równanie N-S tylko w L^2); takie oszacowanie jest dostatecznie silne aby zagwarantować globalną w czasie przedłużalność lokalnych rozwiązań (26).

Konkluzja dotycząca równania Naviera-Stokesa w 3D.

Człon lepkościowy w 3D klasycznym równaniu Naviera-Stokesa jest zbyt słaby aby zapobiedz wybuchowi 'lepszych norm' rozwiązania w skończonym czasie. Dla małych danych (u_0, f) wspomagając się własnością, że nieliniowość w równaniu N-S jest 'kwadratowa' potrafimy uzyskać globalną w czasie przedłużalność rozwiązań.

Aby rozwiązać Problem Milenijny dotyczący trójwymiarowego równania Naviera-Stokesa trzeba znaleźć, lepsze od standardowego L^2, oszacowanie a priori rozwiązań. Wtedy, nieliniowość może być kontrolowana przez operator Stokesa w myśl warunku podporządkowania (13), uniemożliwiając wybuch normy i zapewniając globalną przedłużalność rozwiązań w czasie. W szczególności, o ile mielibyśmy oszacowanie a priori rozwiązania w $L^N(\Omega)$ $(L^{N^+}(\Omega))$, równanie N-S w wymiarze N byłoby podkrytyczne (krytyczne), co wynika z następującego prostego oszacowania:

$$\|P(u\cdot\nabla)u\|_{X^{-\frac{1}{2}}} \le c\||u|^2\|_{[L^2(\Omega)]^N} \le c'\|u\|_{[L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)]^N}\|u\|_{[L^N(\Omega)]^N}$$
$$\le c''\|u\|_{X^{\frac{1}{2}}}\|u\|_{[L^N(\Omega)]^N}.$$

References 3.

- J. Leray, *Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), 193-248.
- T. Kato, H. Fujita, *On the nonstationary Navier-Stokes system*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova **32** (1962), 243-260.
- J.-L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- Y. Giga, *Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L_r spaces*, Math. Z. **178** (1981), 297-329.
- Y. Giga, T. Miyakawa, *Solutions in L_r of the Navier-Stokes initial value problem*, Arch. Rational Mech. Anal. **89** (1985), 267-281.
- M. Kwaśnicki, *Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator*, Frac. Calc. Appl. Anal. **20** (2017), 7-51.